<u>Proposizione</u> Data una base $v_1, , v_n$ di V allora ogni $v \in V$ si scrive IN MODO UNICO come combinazione lineare di v_1, v_n.

<u>Dim</u> Dato che $v_1, , v_n$ generano V

per ogni $v \in V$ trovo $\alpha_1, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tc

$$\alpha_1 v_1 + \quad + \alpha_n v_n = v$$

Se esistessero anche $\beta_1, , \beta_n \in \mathbb{R}$ tc

$$\beta_1 v_1 + \quad + \beta_n v_n = v$$

Sottraendo le due equazioni ottengo:

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \quad + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

Poiché $v_1, , v_n$ sono lin INDIP

deve valere $\alpha_1 - \beta_1 = 0$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0$$

$$\alpha_n - \beta_n = 0$$

cioè $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, , $\alpha_n = \beta_n$. $\square$

Esempio $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

Una base $1, x, x^2, x^3$

Un'altra base è $1+x, x+x^3, x^2-x^3, x^3+1$

Prendo il polinomio $p(x) = x^3 + x + 7 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

$$p(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 7 \cdot 1$$

è scritto come combinazione lineare di $x^3, x^2, x, 1$

Ora proviamo a scrivere $p(x)$ come comb. lineare dell'altra base

$$p(x) = \alpha(1+x) + \beta(x+x^3) + \gamma(x^2-x^3) + \delta(x^3+1)$$

x^3+x+7

Si nota subito studiando i coeff di x^2 a sinistra e a destra, che deve essere $\gamma = 0$

$$x^3+x+7 = \alpha(1+x) + \beta(x+x^3) + \delta(x^3+1)$$

$$\begin{array}{l} \text{coeff di } x^3 \\ \text{coeff di } x \\ \text{coeff di } 1 \end{array} \begin{cases} \beta+\delta = 1 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \alpha+\delta = 7 \end{cases}$$

è un sistema lineare.

MATRICE COMPLETA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

MOSSE DI RIGA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$2\delta = 7$ soit $\boxed{\delta = \frac{7}{2}}$

$\beta + \delta = 1$ cioè

$\beta + \frac{7}{2} = 1$ cioè $\beta = -\frac{5}{2}$

$\alpha + \beta = 1$ cioè

$\alpha - \frac{5}{2} = 1$ cioè $\alpha = \frac{7}{2}$

In conclusione:

$$p(x) = \frac{7}{2}(1+x) - \frac{5}{2}(x+x^3) + 0(x^2-x^3) + \frac{7}{2}(x^3+1)$$

$$p(x) \longrightarrow \frac{7}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{7}{2}$$

è una lista che INDIVIDUA $p(x)$

una volta fissata la base $(1+x), (x+x^3), (x^2-x^3), (x^3+1)$.

Si usa la seguente notazione

$$p(x) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}_{(1+x),\, x+x^3,\, x^2-x^3,\, x^3+1}$$

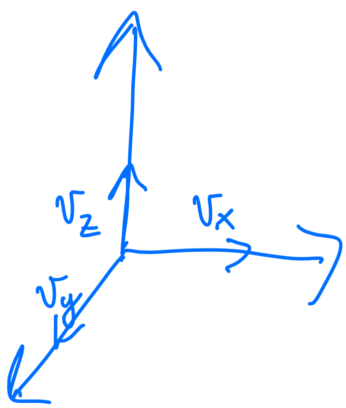
Tornando invece alla base $x^3, x^2, x, 1$

$$\overset{x^3+x+7}{\overset{\shortparallel}{p(x)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}_{x^3,\, x^2,\, x,\, 1}$$

Dunque lo stesso polinomio $p(x)$ viene rappresentato da due colonne diverse a seconda della base scelta.

Fin dall'inizio in effetti un vettore di $\mathbb{R}^3$ lo abbiamo scritto

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{v_x, v_y, v_z}$$



era sottointeso che si stava usando la "base standard" di $\mathbb{R}^3$

DIMENSIONE di uno spazio vettoriale.

Siano $v_1, , v_n$ e $w_1, , w_m$

due basi di uno spazio vettoriale V.

Esprimo i vettori w_i usando la base $v_1, , v_n$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{v_1, \dots, v_n}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}_{v_1, \dots, v_n}$$

Li metto accanto a formare una matrice:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & & & w_m & \end{array} \end{array}$$

Poichè anche $w_1, \ldots, w_n$ è una base ogni vettore dello spazio V

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{v_1, \ldots, v_n}$$

sarà combinazione lineare dei $w_1, \ldots, w_n$

A livello di vettori colonna vuol dire:

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{w_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{w_2} + \ldots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{w_n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

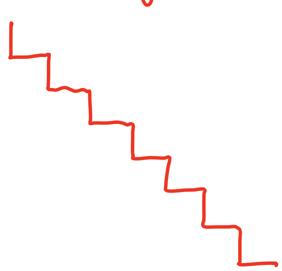
Il sistema che ne deriva ha dunque sempre soluzione, qualunque sia $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Inoltre, poiché $w_1, \dots, w_m$ è base, per la proposizione precedente, la soluzione è unica

MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA SCRITTO SOPRA

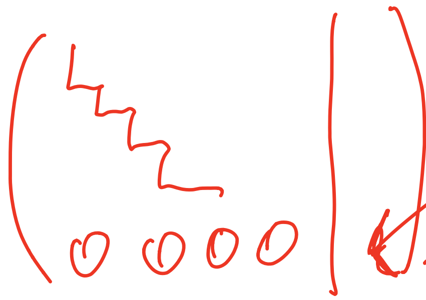
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & a_1 \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & \vdots \\ \vert & \vert & \vert & \vert & \vert & a_n \end{pmatrix} \\ w_1 \;\; w_2 \qquad\qquad w_m \qquad\quad \end{array}$$

Riducendola a scalini, la matrice incompleta non può avere scalini lunghi, altrimenti le soluzioni, (che sappiamo ci sono), sarebbero infinite. Gli scalini devono essere tutti corti:



Inoltre non può esserci una riga vuota,

altrimenti la matrice completa potrebbe avere un pivot in più, e dunque non ci sarebbe soluzione (che invece c'è sempre)



verrebbe qui una espressione tipo $2a_1 - 4a_2 + 5a_n$ che per qualche valore degli a_i sarebbe $\neq 0$.

Dunque la forma a scalini della matrice incompleta deve avere esattamente n scalini CORTI (ossia n PIVOT). Questo significa, siccome le colonne erano m, che deve essere $m = n$.

Il ragionamento precedente dimostra il seguente teorema:

<u>Teorema</u> Dato uno spazio vettoriale V,

se $v_1, , v_n$ è una base e

$w_1, , w_m$ è una base,

allora $n = m$.

Def Dato uno spazio vettoriale V con una base $v_1, , v_n$, si dice che V ha dimensione n.

Inoltre si dice che lo spazio vettoriale banale $\{0\}$ ha dimensione 0.

Esercizio Che dim ha $\mathbb{R}[x]^{\leq 12}$?

Considero la base $1, x, x^2, \ldots\ldots, x^{11}, x^{12}$ e dunque la dimensione è 13.

Problema Dati in $\mathbb{R}^4$ due vettori lin indipendenti $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è possibile trovare due vettori v_3 e v_4 tc

v_1, v_2, v_3, v_4 sia una base di $\mathbb{R}^4$

ILLUSTRIAMO L'ALGORITMO DESCRITTO DAL LIBRO!

Li scrivo per riga

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FACCIO RIDUZIONE A SCALINI

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aggiungo queste due righe in modo da avere una forma a scalini con 4 PIVOT

I vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vanno bene.

Esercizio In $\mathbb{R}^5$, dati

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

completarli ad una base v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

riduco a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

← aggiungo questi, in modo da avere, a meno di permutazioni di righe, una forma a scalini con 5 PIVOT

I vettori $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

vanno bene.

Avrei avuto infinite altre scelte per v_3, v_4, v_5.

<u>Esercizio</u> $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

Completare $p_1(x) = x^3 - 2x + 7$

$p_2(x) = x^3 + x + 7$

ad una base. $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

Innanzitutto scrivo:

$$p_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}_{x^3, x^2, x, 1}$$

$$p_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}_{x^3, x^2, x, 1}$$

Poi li metto per riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

riduco a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

← aggiungo questi due vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x^3, x^2, x, 1}$$ che polinomio rappresenta? x^2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{x^3, x^2, x, 1.}$$ rappresenta 1

Dunque $p_3(x) = x^2$, $p_4(x) = 1$

Vanno bene (avrei infinite altre scelte)